Théorèmes Algèbre

Groupe :

Un groupe est un couple où et un ensemble muni d’une loi de composition interne

qui est :

* Associative :
* Existence d’un neutre noté :
* Existence d’un inverse : , on note

Un groupe est dit abélien si

Groupe symétrique :

Soit . On définit l’ensemble des bijections de dans lui-même :

Un élément de est appelé permutation.

Pour , on note

Propriété : est de cardinal

Définition du cycle :

Un cycle est une permutation telle que 2 à 2 distincts (avec ) tq et

On note aussi . L’entier est appelé longueur du cycle .

Commutation des permutations à supports disjoints :

Deux permutations de à supports disjoints commutent entre elles.

Toute permutation se décompose en un produit de cycles à supports disjoints.

Toute permutation se décompose en un produit de transpositions.

Signature :

Soit et un couple tel que . On dit que réalise une inversion du couple si . On note le nombre de tels couples sur lesquels réalise une inversion, aussi appelé nombre d’inversions de .

On nomme signature d’une permutation le réel

Signature d’une transposition :

La signature d’une transposition est toujours -1

Signature de composée :

Soient alors

Ainsi

Signature d’un cycle :

Soit un cycle de longueur , alors

Déterminant :

Soit . On note et on note déterminant de A le scalaire :

Encore noté

Déterminant des matrices triangulaires supérieures :

Soit triangulaire supérieure alors

Déterminant de la transposée :

Soit , alors

Multilinéarité du déterminant :

Le déterminant est une forme multilinéaire, *ie* il est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes

De plus, c’est une forme multilinéaire alternée, *ie* échanger deux colonnes de la matrice résultera en l’opposé du déterminant.

Matrice avec deux colonnes égales :

Soit ayant deux colonnes égales, alors

Colonnes liées :

Soit . Si les colonnes de sont liées, alors

Produit des déterminants :

Soient

Inversibilité et déterminants :

1. inversible
2. Si inversible, alors

Opérations sur les déterminants :

(Les énoncés utilisés pour les colonnes fonctionnent aussi pour les lignes)

* L’opération ne modifie pas le déterminant
* L’opération multiplie le déterminant par -1
* L’opération multiplie le déterminant par .

Développement de par rapport à la colonne

On note le mineur de A obtenu en supprimant et

Et le cofacteur de A,

Développement de par rapport à la ligne

Déterminant d’une matrice triangulaire par blocs :

Soient , alors

Comatrice :

La comatrice de , notée , est la matrice des cofacteurs de :

Inverse d’une matrice :

Soit inversible, alors

**Détermination d’une matrice :**

Définition : Matrice extraite

Soit On appelle matrice extraite de toute matrice obtenue à partir de en supprimant un certain nombre de ses lignes & colonnes.

Rang des matrices extraites : Soit le rang de est supérieur au rang de n’importe quelle matrice extraite de .

Lemme : Mineur et rang

Soit . Soit . On a l’équivalence :

Théorème : Soit non nulle. Le rang de est égal à l’ordre maximal des mineurs non nuls extraits de , c’est-à-dire ssi il existe un mineur d’ordre de non nul et tous les mineurs d’ordre supérieur à de sont nuls.

**Formules de Cramer**

Soit et des scalaires. Le système linéaire de équations à inconnues suivant :

a pour écriture matricielle où

Si , le système ci-dessus admet une unique solution donnée par :

Où sont les colonnes de .

**Déterminant d’un endomorphisme**

Dans toute cette parte, désigne un -ev de dimension finie , et

Lemme/définition : (Déterminant d’un endomorphisme)

Soient deux bases de . Alors et ont le même déterminant. Ce déterminant est le déterminant de l’endomorphisme .

Premières propriétés sur les déterminants d’endomorphismes :

1. , avec
2. Si est bijectif,

**Déterminant d’une famille de vecteurs**

Soit un -ev de dimension muni d’une base . Soient .

Notons , qui est une matrice colonne.

Définition : On appelle déterminants dans la base de la famille de vecteurs de le scalaire

Propriété : (Relation base/déterminant)

Soit une famille de vecteurs de . Les 2 assertions suivantes sont équivalentes :

1. est une base de

Propriété : Soit et une famille de vecteurs de .

Alors